Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlichen Reihen*

Carl Gustav Jacob Jacobi

Ich werde die Theorie der Auflösung von Gleichungen über unendliche Reihen auf neuen Prinzipien begründen, welche insbesondere darin bestehen, dass man einer *erzeugenden* Funktion der zu findenden Reihe oder einer Funktion bedarf, in deren Entwicklung wir nach Festlegung einer gewissen Beschaffenheit eine Reihe finden, welche die Wurzel als Koeffizienten eines gewissen Terms ausdrückt. So werden wir sehen, dass nach Vorgabe einer Gleichung $f(x) = 0$ die Reihen, mit welchen die Wurzel und daher die Potenzen dieser Wurzel ausgedrückt werden, aus einer eigenen Entwicklung von $\log f(x)$ oder auch $\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}$ gefunden werden; nach Festlegen zweier Gleichungen $f(x,y) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$ zwischen den Variablen x, y werden die Reihen, mit welchen die Wurzeln x, y und deren Potenzen sowie Produkte ausgedrückt werden, aus einer besonderen Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}$$

gefunden; sind die Gleichungen

$$f(x,y,z) = 0, \quad \varphi(x,y,z) = 0, \quad \psi(x,y,z) = 0$$

zwischen in drei Variablen x, y, z vorgelegt, werden die Reihen, mit denen die Wurzeln x, y, z und deren Potenzen sowie Produkte ausgedrückt werden, aus einer besonderen Entwicklung des Ausdrucks

*Originaltitel: "De Resolutione Aequationum Per Series Infinitas", Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 6: pp. 257–286. Nachdruck in: G.G.J. Jacobi's gesammelte Werke – Band 6, pp. 26 – 61 übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$\frac{f'(x)(\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y))+f'(y)(\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z))+f'(z)(\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x))}{f\cdot\varphi\cdot\psi}$$

gefunden; wie diese weiter fortgesetzt werden, ist bereits leicht ersichtlich.

Es ist ratsam zu bemerken, dass schon vor einiger Zeit der illustre Herr LAGRANGE zu Beginn einer sehr berühmten Abhandlung, in welcher das Theorem, was heute seinen trägt, aufgestellt hat (*Histoire de l'Académie de Berlin, Année 1768*), jene Erzeugung einer Reihe, durch welche die Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ausgedrückt wird, betrachtet hat, aber anschließend jenen Weg, auf welchem er sein Theorem gefunden hatte, nicht weiter verfolgt hat. Denn sowohl er selbst als auch andere verlangten fortwährend einen strengen Beweis des Lehrsatzes, welchen er damals nur angegeben hatte. Unser Beweis ist auf andere Grundlagen gestützt, welche überdies eine große Übereinstimmung mit denen haben, welche der sehr scharfsinnige Herr CAUCHY in einem Kalkül genutzt hat, welches er als das der *Residuen* genannt hat. Aber zumal von uns nicht Weniges hinzugefügt worden ist und jene Prinzipien sich um vieles weiter erstrecken und daher auf die Auflösung von Gleichungen zweier oder dreier Gleichungen in mehreren Variablen angewandt worden sind, kann dieses zur Weiterentwicklung jenes Residuenkalküls, welches der Autor so erfolgreich zu nutzen pflegt, verwendet werden.

Weil wir aber im Folgenden die Reihen, von denen geredet wird, als Koeffizienten gewisser Ausdrücke, die in bestimmter Weise entwickelt worden sind, finden, werden wir einer Notation bedürfen, mit welcher die einzelnen Koeffizienten der vorgelegten Entwicklung ausgedrückt werden. Zu diesem Zweck werde ich dieselbe Schreibweise verwenden, welche ich einst in der kleinen Abhandlung *de fractionibus simplicibus*"(Berlin 1825, verg. Buch III, pp. 1–44 dieser Ausgabe) genutzt hatte. Während also $f(x)$ eine Funktion bezeichnet, welche auf bestimmte Weise nach Potenzen von x entwickelt worden ist, werde ich den Koeffizienten der Potenz x^n mit dem Symbol

$$[f(x)]_{x^n}$$

anzeigen. Ist eine Funktion mehrerer Variablen $f(x, y, z, \cdots)$ nach Potenzen entwickelt worden, werde ich den Koeffizienten des Terms $x^m y^n z^p \cdots$ mit dem Symbol

$$[f(x, y, z, \cdots)]_{x^m y^n z^p \cdots}$$

bezeichnen. Man kann freilich bemerken, insofern die entwickelte Funktion nur ganze positive Potenzen der Variablen beinhaltet, dass anstellte unserer Notation wieder die übliche Notation der Differentiation verwendet werden kann. In diesem Fall wird nämlich eines Beispiels wegen

$$[f(x)]_{x^n} = \frac{1}{\Pi(n)} \frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

wenn nach der Differentiation $x = 0$ gesetzt wird und $\Pi(n)$ das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ bezeichnet. Dasselbe gilt im Fall, im welchem $f(x)$ endlich viele negative Potenzen von x enthält. Sobald nämlich nach entsprechender Multiplikation der Funktion mit x^m alle Potenzen positiv werden, wird

$$[f(x)]_{x^n} = \frac{1}{\Pi(m+n)} \frac{d^{m+n} x^m f(x)}{dx^{m+n}},$$

wenn nach der Differentiation $x = 0$ gesetzt wird. Ebenso verhält es sich für mehrere Variablen. Aber im Folgenden werden auch Entwicklungen betrachtet werden, die zu beiden hin ins Unendliche laufen oder solche, die sowohl positive als auch negative Potenzen bis ins Unendliche beinhalten, deren Koeffizienten nicht mit der üblichen Notation der Ableitung dargeboten werden können.

Es ist aber anzumerken, dass im Allgemeinen dem Ausdruck $[f(x)]_{x^n}$ nur eine sinnvolle Bedeutung zukommen kann, wenn zuvor die tauglichste Art der Entwicklung bestimmt worden ist. Denn es trägt sich zu, dass, insofern über die Entwicklung einer Funktion geredet wird, deren Argument aus mehreren Variablen oder Termen besteht, wie etwa $\frac{1}{a+b+c+\cdots}$, $\log(a + b + c + \cdots)$, man die eine oder andere Reihe findet, wo man die Entwicklung nach absteigenden Potenzen eines anderen Buchstabens a, b, c, $\cdots$. Daher, werden die Koeffizienten nur eindeutig sein, wenn die Entwicklungsart angegeben worden ist. In den Fällen, wie es auch die Betrachtung der Funktion selbst lehren möge, welche Art und Weise der Entwicklung am dienlichsten ist, werde ich den Buchstaben, nach welchem die Entwicklung nach absteigenden Potenzen zu geschehen angenommen wird, zuerst in der Reihe darbieten, so wie wir es in der vorherigen Abhandlung *Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionen etc.* (verg. Buch III, pp. 67–90 dieser Ausgabe) gemacht haben. Dennoch wird, sofern beurteilt werden sollte, welche Entwicklungsweise gewählt werden sollte, explizit hinzugefügt.

Nun wollen wir die Grundlagen, von denen wir reden, in den folgenden Lemmata darlegen.

LEMMA I

Wir wollen festlegen, dass die Funktion $f(x)$, in einer gewissen Art und Weise entwickelt, nur Terme enthält, die Potenzen von x sind, aber nicht den Logarithmus von x; ihre Ableitung $\frac{df(x)}{dx}$ wird demnach den Term $\frac{1}{x}$ nicht aufweisen, welcher freilich nur aus der Ableitung des Terms $\log x$ hervorgehen könnte, welcher ja in $f(x)$ nicht auftritt. Es wird also

$$(1) \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = 0$$

sein, woher nach Setzen von $\frac{1}{m+1}f(x)^{m+1}$ anstelle von $f(x)$

$$(2) \qquad \left[f(x)^m \frac{df(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = 0$$

wird. Formel (2) erfährt im Fall $m = 1$ eine Ausnahme, welche eine eigene Betrachtung verlangt. Wir wollen also den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ im Ausdruck

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d\log f(x)}{dx}$$

suchen. Es sei also der Term von $f(x)$, nach dessen absteigenden Potenzen $\log f(x)$ entwickelt werde, $a_\mu x^\mu$ und man setze

$$f(x) = a_\mu x^\mu (1+U),$$

woraus

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{\mu}{x} + \frac{d\log(1+U)}{dx}$$

ist. Nun besteht der Ausdruck

$$\log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \frac{U^4}{4} + \cdots$$

allein aus Potenzen von x, woher

$$\left[\frac{d\log(1+U)}{dx}\right]_{x^{-1}} = 0$$

wird, und daher

$$(3) \qquad \left[\frac{d\log f(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = \left[\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = \mu.$$

Wir sehen also, *sofern die Potenzen der Funktion $f(x)$ nach absteigenden Potenzen des Terms $a_\mu x^\mu$ entwickelt werden, welchen wir festlegen, einer von den Termen von $f(x)$ zu sein, dass im Ausdruck*

$$f(x)^m \frac{df(x)}{dx}$$

der Koeffizient des Terms $\frac{1}{x}$ stets $= 0$ ist oder jener Ausdruck den Term $\frac{1}{x}$ überhaupt nicht aufweist, wenn nicht $m = -1$ ist, in welchem Fall der Term $\frac{1}{x}$ den Koeffizienten μ hat.

In den Anwendungen dieses Lemmas, welche wir unten bei der Auflösung von Gleichungen durch Reihen machen werden, wird der Term, nach welchem die Entwicklung der absteigenden Potenzen durchzuführen ist, ax oder die erste Potenz der Variable sein; in diesem Fall werden wir daher

$$\left[\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = 1$$

setzen. Wir wollen festlegen, dass $F(x)$ eine andere Funktion ist, die entwickelt auch allein aus Potenzen von x besteht; aus (1) wird

$$\left[\frac{dF(x)f(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = 0$$

sein, und daher

$$(4) \qquad \left[F(x)\frac{df(x)}{dx}\right]_{x^{-1}} = -\left[f(x)\frac{dF(x)}{dx}\right]_{x^{-1}}$$

oder allgemeiner

$$(5) \qquad \left[F(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right]_{x^{-1}} = (-1)^n \left[f(x)\frac{d^n F(x)}{dx^n}\right]_{x^{-1}},$$

welche Formel man oftmals gewinnbringend nutzen wird.

LEMMA II

Wir wollen festlegen, dass die Funktionen $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ auf bestimmte Weise entwickelt nur Terme beinhalten, die Potenzen von x, y sowie deren Produkte sind, und daher die Terme $\log x$, $\log y$ nicht enthalten: Es folgt aus Lemma I, dass in den Ausdrücken[1]

$$\frac{\partial[\varphi f'(x)]}{\partial y}, \quad \frac{\partial[\varphi f'(y)]}{\partial x}$$

im ersten die mit $\frac{1}{y}$ multiplizierten Terme, im anderen die mit $\frac{1}{x}$ multiplizierten Terme fehlen; daher wird in keinem der beiden der Term $\frac{1}{xy}$ gefunden werden. Also wird auch die Differenz der beiden

$$\frac{\partial[\varphi f'(x)]}{\partial y} - \frac{\partial[\varphi f'(y)]}{\partial x} = f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)$$

den Term $\frac{1}{xy}$ nicht aufweisen; wir finden somit das neue und merkwürdige Theorem

$$(6) \quad [f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]_{x^{-1}y^{-1}} = 0.$$

Daraus folgt auch, wenn $\frac{1}{m+1}f^{m+1}$, $\frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}$ anstelle von f, φ gesetzt worden sind,

$$(7) \quad [f^m\varphi^n\{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)\}]_{x^{-1}y^{-1}} = 0.$$

Diese Formel erfährt eine Ausnahme im Fall $m = -1$, $n = -1$, welcher gesondert zu untersuchen ist.

Und dazu bemerke ich zuerst, wenn nur die eine der beiden Zahlen, beispielsweise, $m = -1$ ist, dass Formel (7) sich nicht ändert, oder auch der Ausdruck

$$f^{-1}\varphi^n\{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)\} = \varphi^n\left\{\frac{\partial \log f}{\partial x}\varphi'(y) - \frac{\partial \log f}{\partial y}\varphi'(x)\right\}$$

den Term $\frac{1}{xy}$ nicht enthält. Wir wollen nämlich festlegen, dass $ax^\mu y^\mu$ ein Term von $f(x,y)$ ist, nach dessen absteigenden Potenzen seine Potenzen oder

[1] Hier werde ich aus Gründen der Bequemlichkeit die Notation für die partiellen Ableitungen verwenden, welche der illustre Herr LAGRANGE vorgeschlagen hat.

Logarithmus entwickelt werden, $\log f(x,y)$ wird die logarithmischen Terme $\mu \log x + \nu \log y$ enthalten; aber aus den Differentialen $\frac{f'(x)}{f}$, $\frac{f'(y)}{y}$ gehen die Logarithmen heraus, woher auch die Ausdrücke

$$f^{-1}\varphi^{n+1}f'(x), \quad f^{-1}\varphi^{n+1}f'(y)$$

allein aus den Potenzen und Produkten von x, y bestehen. Daraus folgt, dass in deren Differentialen

$$\frac{\partial[f^{-1}\varphi^{n+1}f'(x)]}{\partial y}, \quad \frac{\partial[f^{-1}\varphi^{n+1}f'(y)]}{\partial x}$$

respektive die mit $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ multiplizierten Terme fehlen; daher wird keine der beiden den Term $\frac{1}{xy}$ haben, und daher auch nicht deren Differenz

$$(n+1)f^{-1}\varphi^n \left\{ f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x) \right\}$$

oder es wird

$$(8) \quad \left[f^{-1}\varphi^n \left\{ f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x) \right\}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = 0$$

sein, was zu beweisen war.

Nun wollen wir sehen, was mit Formel (7) geschieht, wenn gleichzeitig $m = -1$ und $n = -1$ ist, oder wir wollen den Koeffizienten des Terms $\frac{1}{xy}$ im Ausdruck

$$\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi} = \frac{\partial \log f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \log f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}.$$

suchen. Wir wollen festlegen, dass $ax^\mu y^\mu$, $bx^{\mu'}y^{\nu'}$ die Terme von $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sind, nach deren Potenzen deren absteigenden Potenzen und Logarithmen entwickelt werden, und es sei

$$f(x,y) = ax^\mu y^\nu(1+U), \quad \varphi(x,y) = bx^{\mu'}y^{\nu'}(1+V).$$

Wir setzen der Kürze wegen

$$L = \log(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \frac{U^3}{3} - \cdots,$$

$$M = \log(1+V) = V - \frac{V^2}{2} + \frac{V^3}{3} - \cdots,$$

welche Ausdrücke allein aus den Potenzen von x, y bestehen: Man findet

$$\frac{\partial \log f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \log f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial x} = \left(\frac{\mu}{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\right)\left(\frac{\nu'}{y} + \frac{\partial M}{\partial y}\right) - \left(\frac{\nu}{y} + \frac{\partial L}{\partial y}\right)\left(\frac{\mu'}{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\right).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung, nach Öffnen der Klammern, findet man die Ausdrücke

$$\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial M}{\partial x}, \quad \frac{1}{x}\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{1}{x}\frac{\partial M}{\partial y},$$

welche aus dem vorherigen Theorem heraus begründet alle den Term $\frac{1}{xy}$ nicht aufweisen, woher wir im vorherigen Ausdruck den Koeffizienten von $\frac{1}{xy}$ einfach als $\mu\nu' - \mu'\nu$ erhalten; oder es wird

$$\text{(9)} \quad \left[\frac{\partial \log f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \log f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \log \varphi}{\partial x}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = \left[\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$
$$= \mu\nu' - \mu'\nu.$$

Wir sehen also, *wenn die Potenzen der Funktionen $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, welche allein aus Potenzen der Variablen x, y bestehen, nach absteigenden Potenzen der Terme*

$$ax^{\mu}y^{\nu}, \quad bx^{\mu'}y^{\nu'}$$

entwickelt werden, welche wir annehmen in jenen Funktionen gefunden zu werden, dass im Ausdruck

$$f^m\varphi^n\{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)\}$$

der Koeffizient des Terms $\frac{1}{xy}$ stets $= 0$ ist oder der Term $\frac{1}{xy}$ ihm gänzlich fehlt; wenn nicht gerade $m = -1$ und $n = -1$ ist, in welchem Fall der Term $\frac{1}{xy}$ den Koeffizienten

$\mu\nu' - \mu'\nu$ *hat.*

In den Anwendungen dieses Theorems, welche wir unten machen werden, werden die Entwicklungen nach absteigenden Potenzen der Terme ay, by durchgeführt werden, in welchem Fall $\mu = \nu' = 1$, $\mu' = \nu = 0$ ist, und daher auch

$$\left[\frac{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)}{f \cdot \varphi}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = 1.$$

Nach Annahme einer dritten Funktion $F(x,y)$ prüft man leicht, dass

$$(10) \quad F[f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]$$
$$= f'(x)\frac{\partial[\varphi F]}{\partial y} - f'(y)\frac{\partial[\varphi F]}{\partial x} - \frac{\partial[f\varphi F'(y)]}{\partial x} + f\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + f\varphi'(x)F'(y) + \varphi f'(y)F'(x)$$

ist. Sooft nun $F(x,y)$ auch selbst allein aus Potenzen der Variablen x, y besteht, werden nach den vorherigen Theoremen die Ausdrücke

$$f'(x)\frac{\partial[\varphi F]}{\partial y} - f'(y)\frac{\partial[\varphi F]}{\partial x}, \quad \frac{\partial[f\varphi F'(y)]}{\partial x}$$

den Term $\frac{1}{xy}$ nicht aufweisen, woher aus (10)

$$(11) \quad [F(f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)]_{x^{-1}y^{-1}}$$
$$= \left[f\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + f\varphi'(x)F'(y) + \varphi f'(y)F'(x)\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

hervorgeht, welches Theorem unten benutzt werden wird. Es ist anzumerken, dass, sooft F konstant ist, (11) in (6) übergeht.

LEMMA III

Um Analoges für drei Funktionen $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ mit den drei Variablen x, y, z zu finden, bemerke man die identische Gleichung

$$(12) \quad \frac{\partial(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y))}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z))}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial(\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x))}{\partial z}=0,$$

welche man durch Differenzieren leicht überprüft. Aus dieser, wenn der Kürze wegen

$$\Delta = f'(x)(\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y))+f'(y)(\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z))$$
$$+f'(z)(\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x))$$

gesetzt wird, entspringt die folgende:

$$(13)\quad \frac{\partial f(\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y))}{\partial x}+\frac{\partial f(\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z))}{\partial y}+\frac{\partial f(\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x))}{\partial z}=\Delta.$$

Wir wollen festlegen, dass in der entwickelten Funktion $f(x,y,z)$ außer den Potenzen x, y, z keine anderen Terme gefunden werden und sie daher auch keine Logarithmen enthält; weiter sollen die übrigen Funktionen $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ in entwickelter Form entweder allein aus Potenzen der Variablen x, y, z bestehen oder außer jenen die logarithmischen Terme

$$\mu'\log x+\nu'\log y+\omega'\log z,\quad \mu''\log x+\nu''\log y+\omega''\log z$$

enthalten, während μ', ν' etc. Konstanten bezeichnen. Es ist klar, dass die Ausdrücke

$$\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y),\quad \varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z),\quad \varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x)$$

gewiss frei von Logarithmen sind, und daher auch aus den Ausdrücken

$$\frac{\partial f(\varphi'(y)\psi'(z)-\varphi'(z)\psi'(y))}{\partial x},\quad \frac{\partial f(\varphi'(z)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi'(z))}{\partial y},\quad \frac{\partial f(\varphi'(x)\psi'(y)-\varphi'(y)\psi'(x))}{\partial z}$$

der erste keine mit $\frac{1}{x}$ multiplizieren, der zweite keine mit $\frac{1}{y}$ multiplizierten, der dritte keine mit $\frac{1}{z}$ multiplizierten Terme aufweist; daher wird keiner von ihnen den Term $\frac{1}{xyz}$ enthalten, und daher auch nicht deren Summe, welche wir aus (13) sehen $=\Delta$ zu sein. Wir erhalten also das fundamentale Theorem

$$(14)\quad [\Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}=0.$$

Wir wollen nun festlegen, dass auch die erste Funktion $f(x,y,z)$ die logarithmischen Terme $\mu \log x + \nu \log y + \omega \log z$ beinhaltet, während μ, ν, ω konstanten bedeuten, sodass nach Setzen von

$$f(x,y,z) = \mu \log x + \nu \log y + \omega \log z + U$$

U allein aus Potenzen der Variablen x, y, z besteht. Nachdem dieser Ausdruck für $f(x,y,z)$ in Δ eingesetzt worden ist, wird

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial x}(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)) + \frac{\partial U}{\partial y}(\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z)) + \frac{\partial U}{\partial z}(\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x))$$

$$+\frac{\mu}{x}(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)) + \frac{\nu}{y}(\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z)) + \frac{\omega}{z}(\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x)).$$

Nun wird nach (14) der erste Teil dieses Ausdrucks

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)) + \frac{\partial U}{\partial y}(\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z)) + \frac{\partial U}{\partial z}(\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x))$$

den Term $\frac{1}{xyz}$ nicht besitzen; weiter erhalten wir aus Lemma II leicht, dass in den Ausdrücken

$$\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y), \quad \varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z), \quad \varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x)$$

die Koeffizienten der Terme $\frac{1}{yz}$, $\frac{1}{zx}$, $\frac{1}{xy}$ respektive

$$\nu'\omega'' - \nu''\omega', \quad \omega'\mu'' - \omega''\mu', \quad \mu'\nu'' - \mu''\nu'$$

sind, woher das Theorem hervorgeht, *wenn die Funktionen f, φ, ψ entwickelt außer den Potenzen der Variablen x, y, z noch die logarithmischen Terme*

$$\mu \log x + \nu \log y + \omega \log z, \quad \mu' \log x + \nu' \log y + \omega' \log z, \quad \mu'' \log x + \nu'' \log y + \omega'' \log z$$

enthalten, dass

$$(15) \quad [\Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = \mu(\nu'\omega'' - \nu''\omega') + \nu(\omega'\mu'' - \omega''\nu') + \omega(\mu'\nu'' - \mu''\nu')$$

sein wird.

Wir wollen wieder festlegen, dass die Funktionen $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, in bestimmter Art entwickelt, allein aus den Potenzen der Variablen x, y, z bestehen, und deren Potenzen und Logarithmen nach absteigenden Potenzen der Terme

$$ax^{\mu}y^{\nu}z^{\omega}, \quad bx^{\mu'}y^{\nu'}z^{\omega'}, \quad cx^{\mu''}y^{\nu''}z^{\omega''},$$

welche angenommen werden in ihnen gefunden zu werden, entwickelt werden: Deren Logarithmen werden in entwickelter Form außer den Potenzen der Variablen die Terme

$$\mu \log x + \nu \log y + \omega \log z, \quad \mu' \log x + \nu' \log y + \omega' \log z, \quad \mu'' \log x + \nu'' \log y + \omega'' \log z$$

beinhalten. Nachdem wir also in Δ anstelle von f, φ, ψ entweder f^{m+1}, φ^{n+1}, ψ^{p+1} oder $\log f$, $\log \varphi$, $\log \psi$ eingesetzt haben, folgt aus (14), (15) der Lehrsatz, *wenn nicht gerade $m = n = p = -1$ ist, dass*

$$(16) \quad [f^m \varphi^n \psi^p \cdot \Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = 0$$

wird; wenn aber $m = n = p = -1$ ist, dass

$$(17) \quad \left[\frac{\Delta}{f\varphi\psi}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = \mu(\nu'\omega'' - \nu''\omega') + \nu(\omega'\mu'' - \omega''\nu') + \omega(\mu'\nu'' - \mu''\nu')$$

wird.

In den Anwendungen, welche wir unten machen werden, werden die Entwicklungen nach absteigenden Potenzen der Terme ax, by, cz durchgeführt werden, also im Fall $\mu = \nu' = \omega'' = 1$ und $\mu' = \mu'' = \nu'' = \nu = \omega = \omega' = 0$ und daher

$$\left[\frac{\Delta}{f\varphi\psi}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} = 1.$$

Um eine Formel, die (11) von Lemma II ähnlich ist, zu finden, transformiere ich nach Annahme einer vierten Funktion $F(x,y,z)$, welche auch allein aus Potenzen der Variablen bestehe, den Ausdruck $[F \cdot \Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$ in einen anderen $[P]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$, in welchem P die Differentiale der Funktion f nach x, der Funktion φ nach y, der Funktion ψ nach z nicht enthält. Das führt man wie folgt durch. Nachdem nämlich fF anstelle von f im Ausdruck von Δ gesetzt worden ist, geht Formel (14) in diese über:

$$[F \cdot \Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} =$$
$$[fF'(x)(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y)) + fF'(y)(\varphi'(z)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi'(z)) + fF'(z)(\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(y)\psi'(x))]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$$

Weiter folgt aus (11)

$$\begin{aligned} &[fF'(x)(\varphi'(y)\psi'(z) - \varphi'(z)\psi'(y))]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} \\ &= \left[\varphi\psi\frac{\partial^2[fF'(x)]}{\partial y \partial z} + \varphi\psi'(y)\frac{\partial[fF'(x)]}{\partial z} + \psi\varphi'(z)\frac{\partial[fF'(x)]}{\partial y}\right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}; \end{aligned}$$

und aus (4)

$$\begin{aligned} -[fF'(y)\varphi'(x)\psi'(z)]_{z^{-1}} &= \left[\psi\frac{\partial[fF'(y)\varphi'(x)]}{\partial z}\right]_{z^{-1}}, \\ -[fF'(z)\varphi'(y)\psi'(x)]_{y^{-1}} &= \left[\varphi\frac{\partial[fF'(z)\psi'(x)]}{\partial y}\right]_{y^{-1}}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen all dieser in der oberen Gleichung geht

$$-[F \cdot \Delta]_{x^{-1}y^{-1}x^{-1}}$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} \varphi\psi\dfrac{\partial^2[fF'(x)]}{\partial y \partial z} + \varphi\psi'(y)\dfrac{\partial[fF'(x)]}{\partial z} + \psi\varphi'(z)\dfrac{\partial[fF'(x)]}{\partial y} \\ +\psi\dfrac{\partial[fF'(y)\varphi'(x)]}{\partial z} + \varphi\dfrac{\partial[fF'(z)\psi'(x)]}{\partial y} + fF'(y)\varphi'(z)\psi'(x) + fF'(z)\varphi'(x)\psi'(y) \end{array} \right\}$$

hervor. Diese Formel geht leicht in diese über:

$$
(18) \qquad -[F\cdot\Delta]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}} \left\{ \begin{array}{l} f\varphi\psi\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y\partial z} \\ +\, f\dfrac{\partial[\varphi\psi]}{\partial x}\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} + \varphi\dfrac{\partial[\psi f]}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial x} + \psi\dfrac{\partial[f\varphi]}{\partial z}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ +\, F'(x)\left[\varphi\psi\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \varphi\psi'(y)f'(z) + \psi\varphi'(z)f'(y)\right] \\ +\, F'(y)\left[\psi f\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\partial x} + \psi f'(z)\varphi'(x) + f\psi'(x)\varphi'(z)\right] \\ +\, F'(z)\left[f\varphi\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y} + f\varphi'(x)\psi'(y) + \varphi f'(y)\psi'(x)\right] \end{array} \right\}_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}
$$

Aus den Formeln (11), (18) werden wir unten die Lehrsätze, welche der illustre Herr Lagrange über die Auflösung von zwei Gleichungen in zwei Variablen, bzw. drei Gleichungen in drei Variablen einst dargeboten hat, von selbst herausfließen sehen, welche Gleichungen es daher an dieser Stelle im Voraus zu erwähnen gefiel, damit unsere Erkenntnisse leichter mit den Funden jenes Herrn in Einklang gebracht werden können.

Auf gleichem Wege, wie wir sie für zwei und drei Funktionen gefunden haben, werden diese Entdeckungen leicht auf eine höhere Anzahl an Funktionen erweitert.

Über die Inversion von Reihen – oder die Auflösung einer vorgelegten Gleichung mit unendlichen Reihen

Wir wollen eine erste Anwendung der drei angegebenen Lemmata auf den einfachsten und schon öfter behandelten Fall geben, in welchem nach der in eine Reihe zu entwickelnden Wurzel einer vorgelegten Gleichung gefragt wird. Wir werden sehen, dass aus der in gewisser Weise durchgeführten Entwicklung des Logarithmus des Ausdrucks, welcher gleich Null wird, die gesuchte Reihe und ihre Potenzen sowie Logarithmen folgen, welche in jener

Entwicklung als Koeffizienten gefunden werden.

Die Frage über die in eine Reihe zu entwickelnde Wurzel kann in allen Fällen auf die *Inversion* von Reihen zurückgeführt werden, in welcher es darum geht, dass nach Vorlage der Reihe

$$X = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

eine andere Reihe verlangt wird, mit welcher umgekehrt x über X ausgedrückt wird

$$x = b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + \cdots,$$

woher nach Vorlegen der Gleichung

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

die Wurzel

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \cdots$$

gefunden wird. Nach Differenzieren der identischen Gleichung

$$x = b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + \cdots$$

und anschließender Teilung durch X^n erhält man

$$\frac{1}{X^n} = \frac{dX}{dx}\left[\frac{b_1}{X^n} + \frac{2b_2}{X^{n-1}} + \frac{3B_3}{X^{n-2}} + \cdots + \frac{nb_n}{X} + (n+1)b_{n+1} + \cdots\right].$$

Wir wollen in dieser Gleichung die einzelnen Potenzen von X nach aufsteigenden Potenzen von x und daher nach absteigenden Potenzen des Terms $a_1 x$, welcher in X gefunden wird, entwickeln: Aus Lemma I folgt, dass auf der einen Seite der Gleichung, auf besagte Weise entwickelt, der Term $\frac{1}{x}$ nur im Ausdruck $nb_n \frac{1}{X}\frac{dX}{dx}$ gefunden wird: Weiter wird aus demselben Lemma

$$\left[\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right]_{x^{-1}} = 1,$$

woher schon

$$\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^{-1}} = nb_n \quad \text{oder} \quad b_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^{-1}}$$

wird. Dies ist die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten der gesuchten Entwicklung.

Mit der vollkommen gleichen Methode bestimmt man nach Setzen von

$$x^m = y^m[\overset{m}{b}_1 + \overset{m}{b}_2 y + \overset{m}{b}_3 y^2 + \overset{m}{b}_4 y^3 + \cdots]$$

die Koeffizienten $\overset{m}{b}_n$. Nachdem die Gleichung nämlich differenziert worden ist, welche die identische werden muss,

$$x^m = \overset{m}{b}_1 X^m + \overset{m}{b}_2 X^{m+1} + \overset{m}{b}_3 X^{m+2} + \overset{m}{b}_4 X^{m+3} + \cdots,$$

und nach anschließender Teilung durch X^{m+n-1}, hat die eine Seite aus Lemma in dem einen einzigen Ausdruck $(m+n-1)\overset{m}{b}_n \frac{1}{X}\frac{dX}{dx}$ den Term $\frac{1}{x}$, woher

$$\left[\frac{mx^{m-1}}{X^{m+n-1}}\right]_{x^{-1}} = (m+n-1)\overset{m}{b}_n \left[\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}\right]_{x^{-1}} = (m+n-1)\overset{m}{b}_n$$

wird, oder weil allgemein

$$[x^{m-1}f(x)]_{x^{-1}} = [f(x)]_{x^{-m}}$$

ist, wird

$$\overset{m}{b}_n = \frac{m}{m+n-1}\left[\frac{1}{X^{m+n-1}}\right]_{x^{-m}}.$$

Sofern m eine ganze negative Zahl und $n = -m+1$ ist, in welchem Fall (19) unbestimmt wird, muss anstelle der Formel diese eingesetzt werden:

$$(20) \qquad \overset{-m}{b}_{m+1} = m[\log X]_{x^m},$$

welche man leicht überprüft. Mit derselben Methode findet man nach Setzen von

$$\log x = \log y + \log b_1 + \overset{0}{b}_1 y + \overset{0}{b}_1 y + \overset{0}{b}_2 y^2 + \overset{0}{b}_3 y^3 + \cdots$$

dann

$$(21)\qquad \overset{0}{b}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{X^n}\right]_{x^0}.$$

Wenn m eine positive Zahl ist, folgt aus (19)

$$\frac{x^m}{m} = \left[\frac{y^m}{mX^m} + \frac{y^{m+1}}{(m+1)X^{m+1}} + \frac{y^{m+2}}{(m+2)X^{m+2}} + \cdots\right]_{x^{-m}}$$

oder, weil weder X noch $\frac{1}{X}, \frac{1}{X^2}, \cdots, \frac{1}{X^{m-1}}$ in entwickelter Form den Term x^{-m} enthalten,

$$(22)\qquad \frac{x^m}{m} = -[\log(X-y)]_{x^{-m}}.$$

Aus derselben Formel, nach Vergleich mit (20), wird

$$-\frac{1}{mx^m} = -\left[\frac{X^m}{my^m} + \frac{X^{m-1}}{(m-1)y^{m-1}} + \cdots + \frac{X}{y} + \log X - \frac{y}{X} - \frac{y^2}{2X^2} - \cdots\right]_{x^m},$$

oder, weil in X^{m+1}, X^{m+2}, $\cdots$ nur die höheren als die m–te Potenz von x gefunden werden,

$$-\frac{1}{mx^m} = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^m}.$$

Weiter wird aus (21)

$$\log x = \log b_1 + \log y + \left[\frac{y}{X} + \frac{y^2}{2X^2} + \frac{y^3}{3X^3} + \cdots\right]_{x^0}$$

oder, weil $\log b_1 = -\log a_1 = -[\log X]_{x^0}$ ist,

$$(24)\qquad \log x = \log y - [\log(X-y)]_{x^0}.$$

Anstelle der Formeln (22), (24) können diese eingesetzt werden:

$$(25)\qquad \frac{x^m}{m} = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^{-m}},$$

$$(26)\qquad \log x = [\log(y-X) - \log(X-y)]_{x^0},$$

weil der Ausdruck $\log(y-X)$ die negativen Potenzen von x überhaupt nicht enthält; daher sehen wir, dass Formel (25) für alle positiven und negativen

Werte der Zahl m gilt.

Damit man die Formeln nicht missversteht, ist es ratsam zu wiederholen, dass nach dem, was wir oben erinnert haben, für die jeweilige Art, nach welcher das Binom, dessen Logarithmus zu entwickeln vorgelegt wird, man entweder $y - X$ oder $X - Y$ schreibe, wir mit den Ausdrücken $\log(y - X)$, $\log(X - y)$ die verschiedenen Reihen

$$\log(y - X) = \log y - \frac{X}{y} - \frac{X^2}{2y^2} - \frac{X^3}{3y^3} - \frac{X^4}{4y^4} - \cdots,$$
$$\log(X - y) = \log X - \frac{y}{X} - \frac{y^2}{2X^2} - \frac{y^3}{3X^3} - \frac{y^4}{4X^4} - \cdots$$

bezeichnen, in welchem weiter die Potenzen und Logarithmen von X nach aufsteigenden Potenzen von x zu entwickeln sind. Nachdem dies richtig verstanden worden ist, lehren die Formeln (25), (26), *dass in demselben Ausdruck* $\log(y - X) - \log(X - y)$, *auf besagte Weise entwickelt, in welcher Entwicklung außer dem Logarithmus von x seine positiven wie negativen Potenzen bis ins Unendliche gefunden werden, die Koeffizienten der negativen Potenzen die positiven Potenzen, die der positiven Potenzen die negativen, die Konstante den Logarithmus der Reihe darbieten, mit welcher die Wurzel x der Gleichung $X = y$ ausgedrückt wird.*

Man setze

$$b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \cdots = Y,$$

sodass aus der Gleichung $X = y$ dann $x = Y$ wird, aus (25), (26) erhält man die identischen Gleichungen

$$(27) \qquad \frac{Y^m}{m} = [\log(y - X) - \log(X - y)]_{x^{-m}},$$
$$(28) \qquad \log X = [\log(y - X) - \log(X - y)]_{x^0}.$$

Aus diesen Formeln, wenn die Entwicklung des Ausdrucks $\log(y - X) - \log(X - y)$ nach Potenzen von x geordnet wird, findet man

$$\log(y - X) - \log(X - y) = -\log x + \frac{Y}{x} + \frac{Y^2}{2x^2} + \frac{Y^3}{3x^3} + \cdots$$
$$+ \log Y - \frac{x}{Y} - \frac{x^2}{2Y^2} - \frac{x^3}{3Y^3} - \cdots$$

oder, was dasselbe ist,

$$(29) \quad \log(y - X) - \log(X - y) = \log(Y - x) - \log(x - Y).$$

Diese´Formel von wundersamer Einfachheit bleibt unverändert, wenn x, X mit y, Y vertauscht werden: Dies muss wegen Reziprozitätsgesetzes, welches zwischen den Gleichungen $y = X$, $x = Y$ einhergeht, weil aus jener diese und aus dieser jene folgt, sich selbstredend auch so verhalten. Um dies klarer zu sehen, welche Bedeutung der Inhalt von Formel (29) hat, welche in dieser Theorie als die kanonische angesehen werden kann, wollen wir sie als Lehrsatz präsentieren:

THEOREM

Nach Vorlage der Reihe

$$X = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

sei

$$Y = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + \cdots$$

die Reihe, welche aus der Inversion der vorgelegten entsteht, sodass nach Setzen von $X = y$ *dann* $Y = x$ *wird: es wird identisch*

$$\log(y - X) - \log(X - y) = \log(Y - x) - \log(x - Y)$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \log y - \dfrac{X}{y} - \dfrac{X^2}{2y^2} - \dfrac{X^3}{3y^3} - \cdots \\ -\log X + \dfrac{y}{X} + \dfrac{y^2}{2X^2} + \dfrac{y^3}{3X^3} - \cdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \log Y - \dfrac{x}{Y} - \dfrac{x^2}{2Y^2} - \dfrac{x^3}{3Y^3} - \cdots \\ -\log x + \dfrac{Y}{x} + \dfrac{Y^2}{2x^2} + \dfrac{Y^3}{3x^3} + \cdots \end{array}\right.$$

sein, wenn freilich auf der ersten Seite der Gleichung die einzelnen Potenzen und der Logarithmus von X nach aufsteigenden Potenzen von x, auf der zweiten Seite der Gleichung die einzelnen Potenzen und Logarithmen von Y nach aufsteigenden Potenzen von y entwickelt werden. Das Theorem lehrt, dass in derselben Entwicklung des Ausdrucks

$$\log(y - X) - \log(X - y) = \log(Y - x) - \log(x - Y),$$

geordnet nach Potenzen des Elements y, als Koeffizienten die Potenzen und der Logarithmus der vorgelegten Reihe, geordnet nach Potenzen des Elements x, die Potenzen und Logarithmen der inversen Reihe gefunden werden.

Das kuriose Theorem, welches wir nun vorgelegt haben, ist wegen der Gefälligkeit, welcher es sich erfreut, der Mühe wert, es noch mit einem anderen sehr unmittelbaren Beweis zu bestätigt zu haben.

Man setze $X = f(x)$, und entwickle die Ausdrücke

$$\log[f(x) - f(y)] = \log f(x) - \frac{f(y)}{f(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^3 - \cdots,$$
$$\log[f(y) - f(x)] = \log f(y) - \frac{f(x)}{f(y)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^3 - \cdots$$

nach abnehmenden Potenzen von a_1, woher der eine $\log[f(x) - f(y)]$ allein positive Potenzen von y, der andere $\log[f(y) - f(x)]$ allein positive Potenzen von x, aber keine der beiden positive Potenzen von a_1 enthalten wird. Mit diesen Bedingungen ist die Art der Entwicklung gänzlich festgelegt. Nun sei

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a_1 + a_2(x + y) + a_3(x^2 + xy + y^2) + \cdots = U,$$

es wird

$$\log[f(x) - f(y)] = \log(x - y) + \log U = \log U + \log x - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y^3}{3x^3} - \cdots,$$

$$\log[f(y) - f(x)] = \log(y - x) + \log U = \log U + \log y - \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2y^2} - \frac{x^3}{3y^3} - \cdots,$$

sein. In jedem der beiden Ausdrücke muss $\log U$ auf dieselbe Weise entwickelt werden, natürlich nach absteigenden Potenzen von a_1, woher nach der Rechnung

$$(30) \quad \log[f(x) - f(y)] - \log[f(y) - f(x)] = \log(x - y) - \log(y - x)$$

hervorgeht. Nun setze man in dieser Gleichung anstelle von y den Buchstaben Y ein, wonach, weil $f(Y) = y$ ist, Formel (30) in diese übergeht:

$$\log[f(x) - y] - \log[y - f(x)] = \log(x - Y) - \log(Y - x),$$

was nach Setzen von $f(x) = X$ das zu beweisende Theorem ist.

Man setze

$$\begin{aligned} F(x) = A + A'x + A''x^2 + A'''x^3 + \cdots \\ + \frac{B'}{x} + \frac{B''}{x^2} + \frac{B'''}{x^3} + \cdots, \end{aligned}$$

nach Multiplizieren der Gleichung

$$\log(y - X) - \log(X - y) = \log(Y - x) - \log(x - Y)$$

mit $F(x)$ finden wir den Koeffizienten des Terms $\frac{1}{x}$

$$AY + \frac{1}{2}A'Y^2 + \frac{1}{3}A''Y^3 + \frac{1}{4}A'''Y^4 + \cdots + B'\log Y - \frac{B''}{Y} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{Y^2} - \cdots$$

oder

$$[\{\log(y - X) - \log(X - y)\}F(x)]_{x^{-1}} = \int F(Y)dY$$

oder nach Setzen von $F(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$, weil $Y = x$ ist,

$$(31) \quad [\{\log(y - X) - \log(X - y)\}\varphi'(x)]_{x^{-1}}.$$

Wenn in $\varphi(x)$ eine Konstante gefunden wird, wird sie auf der rechten Seite der Gleichung hinzuzufügen sein.

Sofern $\varphi(x)$ allein aus positiven Potenzen von x besteht, wird (31) einfacher so dargeboten

$$(32) \quad \varphi(x) = \varphi(0) - [\varphi'(x)\log(X-y)]_{x^{-1}}.$$

Also wird nach Setzen von

$$\varphi(x) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \cdots$$

$P = \varphi(0)$ sowie

$$(33) \quad P^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi'(x)}{X^n}\right]_{x^{-1}}.$$

Es sei die Gleichung

$$\alpha - z + yf(z) = 0$$

vorgelegt und man entwickle $\psi(z)$ in die Reihe

$$\psi(z) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \cdots$$

Nach Setzen von $z = \alpha + x$ geht die vorgelegte Gleichung in $y = \frac{x}{f(\alpha+x)}$, $\psi(z)$ in $\psi(\alpha+x)$ über: Setzen wir also in (33)

$$X = \frac{x}{f(\alpha+x)}, \quad \varphi(x) = \psi(\alpha+x),$$

wird

$$P^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\frac{\psi'(\alpha+x)f(\alpha+x)^n}{x^n}\right]_{x^{-1}} = \frac{1}{n}[\psi'(\alpha+x)f(\alpha+x)^n]_{x^{n-1}}$$

oder aus dem TAYLOR'schen Satz

$$(34) \quad P^{(n)} = \frac{1}{\Pi(n)} \cdot \frac{d^{n-1}[\psi'(\alpha)f(\alpha)^n]}{d\alpha^{n-1}},$$

woher

$$(35) \quad \psi(z) = \psi(\alpha) + y\psi'(\alpha)f(\alpha) + \frac{y^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{d[\psi'(\alpha)f(\alpha)^2]}{d\alpha} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{d^2[\psi'(\alpha)f(\alpha)^3]}{d\alpha^2} + \cdots$$

wird, was die LAGRANGE'sche Reihe ist.

Sie ist nicht allgemeiner ist die Gleichung, welcher der illustre Herr LAGRANGE sich zu lösen vorgelegt hat,

$$z = F(\alpha + yf(z)),$$

welche natürlich für $z = F(u)$ in die oben verwendete Form

$$u = \alpha + yf(F(u))$$

übergeht, was ratsam ist, es angemerkt zu haben.

Nachdem die erzeugende Funktion der Reihe gefunden worden ist, mit welcher die Wurzel der vorgelegten Gleichung oder die Funktion der Wurzel ausgedrückt wird, haben wir den Vorteil erlangt, dass derselbe Ausdruck leicht auf alle Arten, auf die man die Entwicklung durchzuführen beliebt, angewendet wird, und das sogar auf den sehr allgemeinen Fall, in welchem nach Vorlage der Gleichung $f(x, y) = 0$ eine Funktion $\psi(x, y)$ nach Potenzen von y zu entwickeln ist. Nachdem nämlich die Gleichung

$$0 = f(x, y) = a'y + a''y^2 + \cdots + x(b + b'y + b''y^2 + \cdots) + x^2(c + c'y + c''y^2 + \cdots) + \cdots$$

vorgegeben worden ist, sei die Aufgabe gestellt, die Funktion

$$\psi(x, y) = A + A'y + A''y^2 + \cdots + x(B + B'y + B''y^2 + \cdots) + x^2(C + C'y + C''y^2 + \cdots) + \cdots$$

in eine Reihe der Form

$$\psi(x, y) = P + P'y + P''y^2 + P'''y^3 + \cdots$$

zu entwickeln; um $P^{(n)}$ zu finden, bemerke ich, dass aus unseren Formeln

$$(36) \quad \psi(x, y) = \psi(0, y) - \left[\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x} \log f(x, y)\right]_{x^{-1}}$$

ist; nachdem nun die Ausdrücke $\psi(0, y)$, $\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} \log f(x, y)$ nach Potenzen von y entwickelt worden sind, seien die allgemeinen Terme

$$A^{(n)}y^n, \quad T^{(n)}y^n;$$

es wird

$$(37)\quad P^{(n)} = A^{(n)} - [T^{(n)}]_{x^{-1}}$$

sein. Vor einiger Zeit hat der illustre Herr LAPLACE in der Abhandlung, in welcher er die LAGRANGE'sche Reihe als erster mit einem strengen und sehr eleganten Beweis untermauert hat (*Hist. Acad. Par, im Jahr 1777)*, ohne Beweis ein merkwürdiges sich hierher erstreckendes Theorem angegeben, weil welches sich der Aufmerksamkeit der Geometer entzogen zu haben scheint, ich selbigem mit den Worten des Autors hier den rechtmäßigen Raum geben möchte. Nachdem er nämlich aus der Betrachtung der Gleichung $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = z\frac{\partial x}{\partial t}$, in welcher z eine gegebene Funktion von x ist, die Auflösung der Gleichung $x = \varphi(t + \alpha z)$ und daher von mehreren Gleichungen in mehreren Variablen abgeleitet hatte, hat er dieser Abhandlung am Ende Folgendes hinzugefügt:

"Nach Betrachtungen anderer Gleichungen zu den partiellen Differentialgleichungen in x, α, t ließe sich mit der vorherigen Methode jede beliebige Funktion u von x in eine Reihe entwickeln und man fände auf diese Art unzählige Gleichungen zwischen x und α, für welche diese Entwicklung gelingt; aber wir wären noch ziemlich weit von der Lösung des allgemeinen Problems entfernt, welche Gleichung zwischen x und α auch immer vorgelegt ist, jede beliebige Funktion von x und α, wenn es möglich ist, nach ganzen positiven Potenzen von α zu entwickeln. Um dieses Problem zu lösen, werde ich nun ein Theorem vorlegen, welches wegen der Allgemeinheit und Einfachheit, welcher es sich erfreut, der Aufmerksamkeit der Analytiker würdig ist."

"Es sei $\varphi(x, \alpha) = 0$ eine zwischen x und α vorgelegte Gleichung, und u eine in eine Reihe zu entwickelnde Funktion von x und α; nach Setzen von $\alpha = 0$ geht die vorgelegte Gleichung in $\varphi(x, 0) = 0$ über, nach Auflösen von welcher man voneinander verschiedene Wurzeln haben wird, welchen verschiedene Reihen entsprechen, in welche u entwickelt werden kann; es sei $x - a = 0$ eine von jenen Wurzeln, der Ausdruck $\varphi(x, 0)$ wird dann als Faktor eine positive Potenz von $x - \alpha$ haben, welche wir festlegen $(x - a)^i$ zu sein; nach Festlegen all dessen, wird, wenn der allgemeine Term der Funktion u, welche der Wurzel $x - a = 0$ entspricht, als $\alpha^n q_n$ bezeichnet wird,

$$q_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{\partial^n u}{\partial\alpha^n} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)i}\frac{\partial^{n-1}\left(\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\partial^n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\log\varphi(x,a)\right)}{\partial\alpha^n}\right)}{\partial x^{n-1}}$$

sein, wenn freilich auf der anderen Seite der Gleichung 1. die beiden Variablen x und α als unabhängig voneinander betrachtet werden, 2. nach den Ableitungen nach α anschließend $\alpha = 0$ und nach allen Ableitungen $x = a$ gesetzt wird."

Dieser Lehrsatz wird mit unserer Formel (37) leicht für den Fall bestätigt, in welchem $i = 1$ ist; aber in einem Fall, in dem i nicht $= 1$ ist, findet man, dass selbiger außerordentlich falsch ist. Denn in jenem Fall entsprechen dem Faktor $(x-a)^i$ dann i verschiedene Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,\alpha) = 0$ und nur für $\alpha = 0$ sind diese einander gleich; und auch erstreckt sich die vom illustren Herrn Laplace vorgelegte Formel nicht auf eine Funktion einer einzigen Wurzel, sondern auf eine Summe von Funktionen, welche jenen i Wurzeln entsprechen. Jener Geltungsbereich ist auf diese Weise zu korrigieren:

"Die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x,\alpha) = 0$, welche dem Faktor $(x-a)^i$ entsprechen, seinen x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_i; weiter seien die Werte, welche die Funktion u für $x = x_1, x_2, \cdots x_i$ annimmt, u_1, u_2, $\cdots$, u_i; wenn wir nun

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_i = \sum q_n\alpha^n$$

setzen, wird

$$(38)\quad q_n = \frac{i}{\Pi(n)}\frac{\partial^n u}{\partial\alpha^n} - \frac{1}{\Pi(in-1)}\cdot\frac{\partial^{in-1}\left(\frac{(x-a)^{in}}{\Pi(n)}\frac{\partial^n\left(\frac{\partial u}{\partial x}\log\varphi(x,a)\right)}{\partial\alpha^n}\right)}{\partial x^{in-1}}$$

sein, wenn nach den Ableitungen an der Stelle $\alpha = 0$ auch $x = a$ gesetzt wird."

Den Beweis dieses Theorems lasse ich an dieser Stelle aus. Mit unserer Formel (37) wird auch leicht das Problem gelöst, nach Vorgabe einer Funktion $\varphi(x,y) = 0$, wo wir y als eine Funktion von x ansehen, allgemein die n–te Ableitung der Funktion $\psi(x,y)$ zu finden; denn, ist schlicht $\psi(x,y) = y$, wird

$$(39)\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = -\frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left(i^n \cdot \frac{\partial^n \log \varphi(x+h, y+i)}{\partial h^n}\right)}{\partial i^{n-1}},$$

wenn nach den Ableitungen $h = 0$, $i = 0$ gesetzt wird; oder allgemeiner wird mit $\psi^{(n)} = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}$, $\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}$

$$(40)\quad \frac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial x^n} = \psi^{(n)} - \frac{1}{\Pi(n-1)} \cdot \frac{\partial^{n-1}\left(i^n \cdot \frac{\partial^n \psi_1(x+h, y+i) \log \varphi(x+h, y+i)}{\partial h^n}\right)}{\partial i^{n-1}},$$

wenn auch hier nach den Ableitungen $h = 0$, $i = 0$ gesetzt wird. Aus diesen Formeln leitet man leicht mit bekannten Regeln kombinatorische Bildungsgesetze oder die Bildung der Terme an, aus welchen der gesuchte Ausdruck besteht, auch die Zahlen, welche jene Terme als Koeffizienten haben.

Über die Auflösung von zwei gegebenen Gleichungen zwischen zwei Variablen mit unendlichen Reihen

Nach Vorgabe der Gleichung in zwei Variablen

$$\tau = a'x + a_1 y + a''x^2 + a_1' xy + a_2 y^2 + \cdots,$$
$$v = b'x + b_1 y + b''x^2 + b_1' xy + b_2 y^2 + \cdots$$

transformiere ich durch Setzen von

$$b_1 a^{(m)} - a_1 b_n^{(m)} = \alpha_n^{(m)}, \quad a' b_n^{(m)} - b' a_n^{(m)} = \beta_n^{(m)}, \quad a' b_1 - a_1 b' = \Delta,$$
$$b_1 \tau - a_1 v = t, \quad a' v - b' \tau = u$$

selbige in diese einfacheren:

$$t = \Delta x + \alpha'' x^2 + \alpha_1' xy + \alpha_2 y^2 + \alpha''' x^3 + \cdots,$$
$$u = \Delta y + \beta'' x^2 + \beta_1' xy + \beta_2 y^2 + \beta''' x^3 + \cdots.$$

Wenn nun die Funktion der Wurzeln $f(x, y)$ in die Reihe

$$f(x, y) = \sum C_n^{(m)} t^m u^n$$

zu entwickeln ist, muss nach Setzen von

$$X = \Delta x + \alpha'' x^2 + \alpha_1' xy + \alpha_2 y^2 + \alpha''' x^3 + \cdots,$$
$$Y = \Delta y + \beta'' x^2 + \beta_1' xy + \beta_2 y^2 + \beta''' x^3 + \cdots$$

identisch werden

$$f(x, y) = \sum C_n^{(m)} X^m Y^n,$$

was die Bestimmung der Koeffizienten $C_n^{(m)}$ an die Hand geben wird. Ich finde den allgemeinen dieser Ausdrücke mit Lemma II auf diese Weise:

Nachdem also der Kürze wegen $X' = \frac{\partial X}{\partial x}$, $X_1 = \frac{\partial X}{\partial y}$, $Y' = \frac{\partial X}{\partial x}$, $Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial y}$ gesetzt worden ist und in der Entwicklung des Ausdrucks $\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^mY^n}$ nach absteigenden Potenzen von Δ durchgeführt worden ist, findet man die positiven und negativen Potenzen der Elemente x, y und dennoch nicht, wie wir in Lemma II gesehen haben, den Term $\frac{1}{xy}$, wenn nicht gerade $n = 1$, $m = 1$ ist, aber in dem Fall, wie im Lemma gesehen, ist der Koeffizient von $\frac{1}{xy}$ gerade $= 1$. Deshalb wird nach Multiplikation der Gleichung

$$f(x, y) = \sum C_n^{(m)} X^m Y^n$$

mit dem Ausdruck

$$\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^{p+1}Y^{q+1}}$$

aus Lemma II auf der anderen Seite der Gleichung den Term $\frac{1}{xy}$ nur im Ausdruck, in welchem $m = p$, $n = q$ ist, welcher

$$C_q^{(p)} \cdot \frac{X'Y_1 - X_1Y'}{XY}$$

wird, in welchem man weiter aus demselben Lemma als Koeffizienten des Terms $\frac{1}{xy}$ den Koeffizienten $C_q^{(p)}$ hat. Daher ist nun

$$(41) \quad C_q^{(p)} = \left[f(x,y) \frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^{p+1}Y^{q+1}} \right]_{x^{-1}y^{-1}}.$$

In dieser Formel ist die vollständige Lösung des Problems enthalten.

Ist $f(x,y) = x^m y^n$, geht (41) leicht in diese Formel über:

$$(42) \quad C_q^{(p)} = \left[\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^{p+1}Y^{q+1}} \right]_{x^{-(m+1)}y^{-(n+1)}}.$$

Für ein Beispiel, wie aus den angegeben Formeln die kombinatorische Bildung des allgemeinen Terms der gesuchten Entwicklung gefunden wird, werde ich die Bildung von $C_q^{(p)}$ in (42), wie sie jene Formel an die Hand gibt, angeben.

Zuerst es nämlich klar, dass $C_q^{(p)}$ die Form

$$C_q^{(p)} = \frac{A}{\Delta^{p+q}} - \frac{A_1}{\Delta^{p+q+1}} + \frac{A_2}{\Delta^{p+q+2}} - \cdots \pm \frac{A_{p+q-m-n}}{\Delta^{2p+2q-m-n}}$$

annimmt, in welcher A_λ eine ganze positive Funktion der Koeffizienten α'', α'_1, α_2, $\cdots$, β'', β'_1, $\cdots$ der vorgelegten Gleichungen ist. Der Term von A_λ sei

$$\left(\alpha_{r_\prime}^{r'}\right)^{\mu'} \left(\alpha_{r_{\prime\prime}}^{r''}\right)^{\mu''} \cdots \left(\beta_{s_\prime}^{s'}\right)^{\nu'} \left(\beta_{s_{\prime\prime}}^{s''}\right)^{\nu''},$$

es muss

$$\mu' + \mu'' + \cdots + \nu' + \nu'' + \cdots = \lambda;$$

werden; weiter wird nach Setzen von

$$\mu' + \mu'' + \cdots = a, \quad \nu' + \nu'' + \cdots = b, \quad \text{also} \quad a + b = \lambda,$$
$$\mu'r' + \mu''r'' + \cdots = M, \quad \nu's' + \nu''s'' + \cdots = N,$$
$$\mu'r_\prime + \mu''r_{\prime\prime} + \cdots = M', \quad \nu's_\prime + \nu''s_{\prime\prime} + \cdots = N',$$

es muss

$$M + N = p + a - m, \quad M' + N' = q + b - n$$

werden. Aber man erhält den numerischen Koeffizienten:

$$(nN+mM'+mn)\frac{\Pi(p+a-1)\Pi(q+b-1)}{\Pi(p)\Pi(q)}\cdot\frac{\Pi(a)}{\Pi(\mu')\Pi(\mu'')\cdots}\cdot\frac{\Pi(b)}{\Pi(\nu')\Pi(\nu'')\cdots}.$$

Zugleich findet man aber in A_λ alle Terme, die den angegebenen Bedingungen Genüge leisten. Ich bemerke, dass unter Verwendung der vollständigeren Formen

$$\tau = a'x + a_1y + a''x^2 + a_1'xy + a_2y^2 + \cdots,$$
$$v = b'x + b_1y + b''x^2 + b_1'xy + b_2y^2 + \cdots$$

unsere allgemeine Formel

$$C_q^{(q)} = \left[f(x,y)\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^{p+1}Y^{p+1}}\right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

immer noch Geltung hat, wenn freilich der Ausdruck

$$\frac{1}{X^{p+1}Y^{q+1}}$$

nach abnehmenden Potenzen der Elemente a', b_1 entwickelt worden wäre; dann ist aber $C_q^{(p)}$ aus mehreren unendlichen Reihen zusammengesetzt, welche aus der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{1}{(a'x+a_1y)^m}\cdot\frac{1}{(b_1y+b'x)^n}$$

nach absteigenden Potenzen von a, b_1 entwickelt ihren Ursprung nehmen. Diese haben wir in der Abhandlung *"Exercitatio algebraica circa discerptionem singularem fractionem etc."* gesehen alle mit Brüchen summiert zu werden, deren Nenner Potenzen derselben Größe $\Delta = a'b_1 - a_1b'$ sind. Auf diese Summation vermöge der angegebenen Transformation der vorgelegten Gleichungen, mit welcher in den Termen die von einer Dimension die andere Variable weggeschafft wird, fußen wir demnach zusammengefasst alles, und erhalten auf direktem Weg einen Ausdruck von $C_q^{(p)}$ in endlichen Termen. Überdies erlangt man dasselbe, sofern man anstelle von x, y die Variablen ξ, v einführt, indem man

$$x = b_1\xi - a_1v, \quad y = a'v - b'\xi$$

setzt, woher die linearen Terme

$$a'x + a_1 y = \Delta\xi, \quad b'x + b_1 y = \Delta v$$

werden. Unsere allgemeine Formel (41) lehrt, dass die erzeugende Funktion des allgemeinen Terms

$$C_q^{(p)} t^p u^q$$

der gesuchten Entwicklung

$$f(x,y) \frac{X'Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{q+1}} t^p u^q$$

ist; mithilfe dieser Formel gibt man auch leicht die erzeugende Funktion der ganzen Reihe, mit welcher $f(x,y)$ ausgedrückt wird, an. Sofern nämlich die gesuchte Funktion nur positive Potenzen von t, u beinhaltet, erhält man, indem man den Zahlen p, q alle Werte von 0 bis ∞ zuteilt,

$$(43) \quad f(x,y) = \left[f(x,y) \frac{X'Y_1 - X_1 Y'}{X^{p+1} Y^{p+1}} \right]_{x^{-1} y^{-1}}.$$

Sooft aber die Entwicklung auch mit negativen Potenzen von t, u behaftet ist, muss, damit die Formel auch jenen Fall mit einschließt,

$$(44) \quad f(x,y) = \left[f(x,y)(X'Y_1 - X_1 Y') \left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X} \right) \left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y} \right) \right]_{x^{-1} y^{-1}}$$

gesetzt werden, wo wir auf unsere Weise mit dem Ausdruck

$$\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X} \right) \left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y} \right)$$

die nach beiden Seiten ins Unendliche laufende Reihe

$$\sum \frac{t^p u^q}{X^{p+1} Y^{q+1}}$$

bezeichnen, also den Zahlen p, q alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zugeteilt werden. (Vergleiche die oben erwähnte Abhandlung). Nach Setzen von $f(x,y) = x^m y^n$ wird aus (44)

$$(45) \quad x^m y^n = \left[(X'Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-(m+1)}y^{-(n+1)}}$$

Nach Finden der erzeugenden Funktion der gesuchten Reihe haben wir nun den Vorteil, dass derselbe Ausdruck auf alle Arten angewendet werden kann, auf welche die Entwicklung der Wurzeln durchzuführen beliebt. Es seien nämlich die Koeffizienten der vorgelegten Gleichungen $X - t = 0$, $Y - u = 0$ auch Funktionen der anderen Variablen v, ω; sofern es gefällt, die Funktion der Wurzeln, welche auch die Variablen v, w involviert, $\varphi(x, y, v, w)$ nach Potenzen von v, w zu entwickeln, entwickle man die erzeugende Funktion nach diesen Variablen; auf diese Weise, wenn der allgemeine Term jener Entwicklung

$$P_q^{(p)} v^p w^q$$

ist, in welcher $P_q^{(p)}$ allein die Variablen x, y beinhaltet, wird der allgemeine Term der gesuchten Entwicklung

$$\left[P_q^{(p)}\right]_{x^{-1}y^{-1}} \cdot v^p w^q$$

sein. Dies ist eine Lösung des sehr allgemeinen Problems, nach Vorgabe der Gleichungen

$$\varphi(x, y, v, w) = 0, \quad \psi(x, y, v, w) = 0$$

die Funktion $f(x, y, v, w)$ in eine nach Potenzen von v, w fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Es seien die Reihen, mit welchen die Wurzeln x, y ausgedrückt werden,

$$x = T, \quad y = U,$$

nach Einsetzen welcher anstelle von x, y in Formel (45) man die Gleichung

$$T^m U^n = \left[(X'Y_1 - X_1 Y')\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right)\right]_{x^{-(m+1)}y^{-(n+1)}}$$

erlangt, welche Gleichung lehrt, dass in der Entwicklung des Ausdrucks

$$(X'Y_1 - X_1Y')\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right),$$

sofern sie nach Potenzen von x, y geordnet wird, der allgemeine Term

$$\frac{T^m U^n}{x^{m+1}y^{n+1}}$$

ist, welcher Ausdruck sich demnach auf alle positiven wie negativen Werte der Zahlen m, n erstreckt. Indem man also den Zahlen m, n alle Werte von $-\infty$ bis ∞ zuteilt, finden wir die bemerkenswerte Gleichung

$$\begin{aligned}(46)\quad (X'Y_1 - X_1Y')&\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)\\ &=\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right).\end{aligned}$$

Wegen des Zusammenhangs, welcher zwischen den Gleichungen $X - t = 0$, $Y - u = 0$ und den Gleichungen $T - x = 0$, $U - y = 0$ besteht, mit welchem bewirkt wird, dass aus jenen diese, aus diesen jene folgen, kann man im gerade gefundenen Theorem die Elemente x, y, X, Y mit den Elementen t, u, T, U vertauschen; damit dies aus dem Theorem selbst klar wird, erwähne ich zusätzlich Folgendes.

Es folgt nämlich aus der angegebenen Formel (46) diese:

$$\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=\frac{1}{X'Y_1 - X_1Y'}\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right).$$

Aber gemäß dessen, was ich in der oben zitierten Abhandlung bemerkt habe, halten wir zwar einen Ausdruck von dieser Art

$$\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}$$

nicht für einen verschwindenden, sondern sehen ihn als ein Symbol für eine bestimmte Entwicklung; aber derselbe Ausdruck, mit $x - T$ oder einer höheren Potenz dessen multipliziert, wird verschwinden. Auf dieselbe Weise verschwindet der Ausdruck

$$\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right)$$

nach Multiplikation mit einem Ausdruck von dieser Art $(x-T)^m(y-U)^n$, in welchem m, n positive Zahlen sind. Sofern wir also $\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-T$, $y-U$ entwickeln, kann man die Potenzen und Produkte von $x-T$, $y-U$ verwerfen, und es wird nur der erste Term der Entwicklung zurückbleiben, oder im Ausdruck

$$\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right)$$

können im Faktor $\frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}$ anstelle von x, y die Variablen T, U eingesetzt werden. Nun wird aber für $x=T$, $y=U$ gesetzt $X=t$, $Y=u$; daher findet man nach Setzen von

$$\frac{\partial T}{\partial t}=T', \quad \frac{\partial T}{\partial u}=T_1, \quad \frac{\partial U}{\partial t}=U', \quad \frac{\partial U}{\partial u}=U_1$$

durch Differenzieren nach t,u

$$\begin{aligned} X'T'+X_1U'&=1, \quad Y'T'+Y_1U'=0,\\ X'T_1+X_1U_1&=0, \quad Y'T_1+Y_1U_1=1 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} X'&=\frac{U_1}{T'U_1-T_1U'}, \quad Y'=\frac{-U'}{T'U_1-T_1U'},\\ X_1&=\frac{-T_1}{T'U_1-T_1U'}, \quad Y_1=\frac{T'}{T'U_1-T_1U'}. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt, wenn $x=T$, $y=U$ ist, dass

$$X'Y_1-X_1Y'=\frac{1}{T'U_1-T_1U'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{X'Y_1-X_1Y'}=T'U_1-T_1U'$$

sein wird. Mithilfe dieser Gleichungen erhalten wir die Formel

$$\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=(T'U_1-T_1U')\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right),$$

welche auch aus dem vorgelegten Theorem (46) hervorgeht, nachdem die Buchstaben x, y, X, Y mit den Buchstaben t, u, T, U vertauscht worden sind.

Selbiges Theorem lehrt also, dass diese Vertauschung möglich ist.

Es verbleibt, dass Formel (46)

$$(X'Y_1 - X_1Y')\left(\frac{1}{X-t}+\frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u}+\frac{1}{u-Y}\right)=\left(\frac{1}{x-T}+\frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U}+\frac{1}{U-y}\right),$$

welche wir als das kanonische Theorem bei dieser Frage ansehen können, aus der Natur der durchzuführenden Entwicklungen, zwischen welchen jene Identität besteht, selbst bewiesen wird. Oben gelang selbiges bei der Frage über die Inversion von Reihen oder der Auflösung einer einzelnen Gleichung, weil aus dem Ausdruck $f(x) - f(y)$ der Faktor $x - y$ herausgezogen werden konnte; wie aber in einem System von zwei Gleichungen Ähnliches geleistet werden kann, ist nicht unmittelbar ersichtlich. Dies wird dem, der alles sorgsam betrachtet, dennoch auf diese Weise gelingen.

Man setze $X = f(x,y)$, $Y = \varphi(x,y)$ und man betrachte den Ausdruck

$$\left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}+\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}+\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right).$$

Diesen Ausdruck entwickle man nach abnehmenden Potenzen von Δ, sodass

$\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}$	negative	Potenzen	eines	Elements	x,	der übrigen	positive
$\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}$	"	"	"	"	t,	"	"
$\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}$	"	"	"	"	y,	"	"
$\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}$	"	"	"	"	u,	"	"

beinhalten. Mit diesen Bedingungen ist die Art und Weise, die einzelnen Ausdrücke zu entwickeln vollständig festgelegt. Nun wird man

$$f(x,y) - f(t,u) = A(x-t) + B(y-u),$$
$$\varphi(x,y) - \varphi(t,u) = C(x-t) + D(y-u)$$

setzen können, während A, B, C, D positive ganze Funktionen der Elemente x, y oder unendliche Reihen sind, in welchen man nur positive ganze Potenzen der Elemente x, y findet. Nach Bemerken dessen wird aus der vorgeschriebenen Entwicklungsweise

$$\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}+\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}=\sum\frac{B^p}{A^{p+1}}(u-y)^p\left(\frac{1}{(x-t)^{p+1}}+\frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}\right),$$

$$\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}+\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}=\sum\frac{C^q}{D^{q+1}}(t-x)^q\left(\frac{1}{(y-u)^{q+1}}+\frac{(-1)^q}{(y-u)^{q+1}}\right),$$

in welchen Summen den Zahlen p, q alle Werte von 0 bis ∞ zukommen. Es ist eigentlich nicht nötig, dass ich wiederhole, dass aus der Notation, über welche wir übereingekommen sind, dass die, welche wir mit $\frac{1}{(x-t)^{p+1}}$, $\frac{1}{(t-x)^{p+1}}$ darstellen, voneinander abweichen, dass die eine nach negativen Potenzen von x, die andere nach negativen Potenzen von t fortschreitet. Daher halten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{(x-t)^{p+1}}+\frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}$$

nicht für verschwindend, welcher dennoch, mit einer höheren Potenz von $x-t$ als die p–te multipliziert verschwindet. Auf dieselbe Weise verschwindet der Ausdruck

$$\frac{1}{(y-u)^{q+1}}+\frac{(-1)^q}{(u-y)^{q+1}},$$

mit einer höheren Potenz von $y-u$ als die q–te multipliziert. Daher verschwinden in der Summe

$$\sum\frac{B^pC^q}{A^{p+1}D^{q+1}}(u-y)^p(t-x)^q\left(\frac{1}{(x-t)^{p+1}}+\frac{(-1)^p}{(t-x)^{p+1}}\right)\left(\frac{1}{(y-u)^{q+1}}+\frac{(-1)^q}{(y-u)^{q+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)}+\frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right)\left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)}+\frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right)$$

alle Terme, in welchen $p>q$ oder $q>p$, nach Verwerfen von welchen nur die verbleiben, in welchen $p=q$ ist. Daher wird der vorgelegte Ausdruck

$$\sum \frac{B^p C^p}{A^{p+1} D^{p+1}} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right) \left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right)$$

oder[2]

$$\frac{1}{AD-BC} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right) \left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right).$$

Nun können wir dem, was wir oben bemerkt haben, wo wir $\frac{1}{AD-BC}$ nach positiven Potenzen von $x-t$, $y-u$ entwickelt haben, den ersten Term der Entwicklung oder den ohne Potenzen anstelle des Faktors $\frac{1}{AD-BC}$ einsetzen. Es ist aber klar, dass aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(t,u) &= A(x-t) + B(y-u), \\ \varphi(x,y) - \varphi(t,u) &= C(x-t) + D(y-u), \end{aligned}$$

wenn wir anstelle von t, u die Ausdrücke $x-(x-t)$, $y-(y-u)$ schreiben und $f(t,u)$, $\varphi(t,u)$ nach Potenzen von $x-t$, $y-u$ entwickeln, dass die in der Entwicklung von A, B, C, D von $x-t$, $y-u$ freien Terme respektive $f'(x)$, $f'(y)$, $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$ sein werden; daher lässt sich anstelle von $\frac{1}{AD-BC}$

$$\frac{1}{f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)} = \frac{1}{X'Y_1 - X_1Y'}$$

schreiben; danach wird

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{f(x,y)-f(t,u)} + \frac{1}{f(t,u)-f(x,y)}\right) \left(\frac{1}{\varphi(x,y)-\varphi(t,u)} + \frac{1}{\varphi(t,u)-\varphi(x,y)}\right) \\ &= \frac{1}{X'Y_1 - X_1Y'} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right) \left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung wollen wir anstelle von t, u die Reihen T, U setzen, nach Einsetzen von welchen anstelle von x, y in $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$

[2]Das Theorem, zu dem wir hier gelangt sind,

$$\left(\frac{1}{A(x-t)+B(y-u)} + \frac{1}{A(t-x)+B(u-y)}\right) \left(\frac{1}{D(y-u)+C(x-t)} + \frac{1}{D(u-y)+C(t-x)}\right)]$$
$$= \frac{1}{AD-BC} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t-x}\right) \left(\frac{1}{y-u} + \frac{1}{u-y}\right)$$

ist in anderer Weise in oben zitierter Abhandlung bewiesen worden.

$$f(T,U) = t, \quad \varphi(T,U) = u$$

wird; sofern darüber hinaus $f(x,y) = X$, $\varphi(x,y) = Y$ gesetzt gesetzt wird, geht die vorherige Formel in die folgende über

$$\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right) = \frac{1}{X'Y_1 - X_1Y'}\left(\frac{1}{x-T} + \frac{1}{T-x}\right)\left(\frac{1}{y-U} + \frac{1}{U-y}\right),$$

welche mit $X'Y_1 - X_1Y'$ multipliziert das zu beweisende Theorem an die Hand gibt.

Die von uns angegebenen Methoden werden nicht auf den Fall beschränkt, in welchem die gesuchte Entwicklung allein aus Potenzen von t, u besteht, welchen einen Fall wir bisher betrachtet haben. Aber im Allgemeinen werden mit speziellen Kunstgriffen die übrigen Fälle auf jenen zurückgeführt. Wir wollen eines Beispiels wegen festlegen, dass die Funktion $\log x \log y$ zu entwickeln ist, welche Entwicklung die Form

$$\log t \log u + A \log t + B \log u + C$$

haben wird, während A, B, C allein nach Potenzen von t, u fortschreitende Reihen bezeichnen.

Nun folgt aus den vorgelegten Gleichungen $t = X$, $u = Y$

$$\log x \log y = \log \frac{tx}{X} \log \frac{uy}{Y} = \log t \log u + \log t \log \frac{y}{Y} + \log u \log \frac{x}{X} + \log \frac{y}{Y} \log \frac{x}{X},$$

woraus im Ausdruck $\log \frac{y}{Y}$, $\log \frac{x}{X}$ allein nach Potenzen von x, y und daher auch von t, u entwickelt werden können, und aus diesem Grund reduzieren sie sich auf den vorherigen Fall. Deshalb erhält man aus den vorgelegten Formeln

$$A = \left[\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X-t}\left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y}\right)\log\frac{y}{Y}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = \log\frac{y}{u},$$

$$B = \left[\frac{X'Y_1 - X_1Y'}{Y-u}\left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X}\right)\log\frac{x}{X}\right]_{x^{-1}y^{-1}} = \log\frac{x}{t},$$

$$C = \left[(X'Y_1 - X_1Y') \log \frac{x}{X} \log \frac{y}{Y} \left(\frac{1}{X-t} + \frac{1}{t-X} \right) \left(\frac{1}{Y-u} + \frac{1}{u-Y} \right) \right]_{x^{-1}y^{-1}} = \log \frac{y}{u} \log \frac{x}{t}.$$

Dies soll als Nebenbemerkung reichen.

Die allgemeine oben angegebene Formel

$$C_q^{(p)} = \left[f(x,y) \frac{X'Y_1 - X_1Y'}{X^{p+1}Y^{q+1}} \right]_{x^{-1}y^{-1}}$$

lässt sich mit Formel (11) von Lemma II auch auf diese Weise darstellen:

$$(47) \quad C_q^{(p)} = \left[\frac{f_1'}{pqX^pY^q} - \frac{X_1 f'}{qX^{p+1}Y^q} - \frac{Y' f_1}{pY^pY^{q+1}} \right]_{x^{-1}y^{-1}},$$

wenn freilich $f_1' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f' = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_1 = \frac{\partial f}{\partial y}$ ist. Über das in jener Form vorgelegte Theorem folgt auch leicht das, was der illustre Herr LAPLACE vor einiger Zeit über die Auflösung der Gleichungen

$$x = t + \alpha\varphi(x,y), \quad y = u + \beta\psi(x,y)$$

gefunden hat. Man setze nämlich $x = t + \xi$, $y = u + v$, die vorgelegten Gleichungen werden in die folgenden geändert:

$$\alpha = \frac{\xi}{\varphi(t+\xi, u+v)}, \quad \beta = \frac{v}{\psi(t+\xi, u+v)}.$$

Sofern nun die Funktion $f(x,y) = f(t+\xi, u+v)$ in eine nach Potenzen von α, β fortschreitende Reihe zu entwickeln ist, deren allgemeiner Term

$$C_q^{(p)} \alpha^p \beta^q$$

ist, wird aus der vorhergehenden Formel

$$C_q^{(p)} = \left[\frac{1}{pq} \varphi^p \psi^q \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial v} + \frac{1}{q} \varphi^{p-1} \psi^q \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{p} \varphi^p \psi^{q-1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial v} \right]_{\xi^{p-1}v^{q-1}},$$

wenn der Kürze wegen anstelle von $\varphi(t+\xi, u+v)$, $\psi(t+\xi, u+v)$, $f(t+\xi, u+v)$ nur die Buchstaben φ, ψ, f geschrieben worden sind.

Diese wird aus dem TAYLOR'schen Satz

$$(48) \quad C_q^{(p)} = \frac{1}{\Pi(p-1)\Pi(q-1)} \frac{\partial^{p+q-2}\left[\frac{1}{pq}\varphi^p\psi^q\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{1}{q}\varphi^{p-1}\psi^q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{p}\varphi^p\psi^{q-1}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial x^{p-1}\partial y^{q-1}},$$

in welcher Formel φ, ψ, f die Funktionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $f(x,y)$ bedeuten, und nach den Ableitungen jeweils $x = t$, $y = u$ zu setzen ist. Dies stimmt mit dem vom illustren Herrn LAPLACE angegebenen Theorem überein. Denn die Gleichungen, welche jener betrachtet hatte, nämlich

$$x = F(t + \alpha\varphi(x,y)), \quad y = \Pi(u + \beta\psi(x,y)),$$

werden mit $x = F(x_1)$, $y = \Pi(y_1)$ auf die von uns verwendete Form zurückgeführt.

Ich bemerke noch, dass nach Vorgabe $\varphi(x,y,t,u) = 0$, $\psi(x,y,t,u) = 0$ der Gleichungen, wenn x, y als Funktionen von t, u betrachtet werden, die Ableitungen der Funktion $f(x,y,t,u)$ nach t, u mit unseren Formeln allgemein gefunden werden. Wir wollen nämlich festlegen, dass nachdem $t+h$, $u+i$ anstelle von t, u gesetzt worden ist, x, y in $x+H$, $y+I$ geändert worden sind, woher die vorgelegten Gleichungen

$$\varphi(x+H, y+I, t+h, u+i) - \varphi(x,y,t,u) = 0,$$
$$\psi(x+H, y+I, t+h, u+i) - \psi(x,y,t,u) = 0$$

werden, in welchen wir H, I als die Unbekannten oder die Wurzeln betrachten. Eine Funktion von diesen $f(x+H, y+I, t+h, u+i)$ können wir mithilfe der oben angegebenen Methoden in eine Reihe entwickeln. Nachdem diese nach Potenzen von h, i geordnet worden sind, wird, sobald man den allgemeinen Term $C_q^{(p)} h^p i^q$ findet,

$$\frac{\partial^{p+q} f(x,y,t,u)}{\partial t^p \partial u^q} = \Pi(p)\Pi(q)C_q^{(p)}$$

sein. Wir wollen noch etwas über das System von drei Gleichungen in drei Variablen hinzufügen.

Über die Auflösung von drei gegebenen Gleichungen zwischen drei Variablen mit unendlichen Reihen

Nach Vorlage der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sigma &= ax + by + cz + dx^2 + exy + \cdots, \\
\tau &= a'x + b'y + c'z + d'x^2 + e'xy + \cdots, \\
v &= a''x + b''y + c''z + d''x^2 + e''xy + \cdots
\end{aligned}$$

transformiere ich sie in andere dieser Form

$$\begin{aligned}
s &= \Delta x + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \cdots, \\
t &= \Delta y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + \cdots, \\
u &= \Delta z + \alpha'' x^2 + \beta'' xy + \gamma'' y^2 + \cdots,
\end{aligned}$$

in welchen

$$\begin{aligned}
s &= (b'c'' - b''c')\sigma + (b''c - bc'')\tau + (bc' - b'c)v, \\
t &= (c'a'' - c''a')\sigma + (c''a - ca'')\tau + (ca' - c'a)v, \\
t &= (a'b'' - a''b')\sigma + (a''b - ab'')\tau + (ab' - a'b)v, \\
\Delta &= a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b')
\end{aligned}$$

ist. Wenn nun die Funktion $f(x, y, z)$ der Wurzeln x, y, z in eine Reihe zu entwickeln ist, deren allgemeiner Term $C_{p,q,r}s^p t^q u^r$ ist, finde ich $C_{p,q,r}$ mithilfe von Lemma III auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
X &= \Delta x + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \cdots, \\
Y &= \Delta y + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + \cdots, \\
Z &= \Delta z + \alpha'' x^2 + \beta'' xy + \gamma'' y^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Nach Setzen von

$$\nabla = \frac{\partial X}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$$

und nach Entwicklung des Ausdrucks $X^m Y^n Z^p \nabla$ nach abnehmenden Potenzen von Δ, sehen wir, dass in Lemma III in jener Entwicklung der Koeffizient des Terms $\frac{1}{xyz}$ stets $= 0$ ist, wenn nicht $m = n = p = -1$ ist, in welchem Fall der Term $\frac{1}{xyz}$ den Koeffizienten 1 hat.

Nun muss, wenn

$$f(x,y,z) = \sum C_{p,q,r} s^p t^q u^r$$

ist, identisch

$$f(x,y,z) = \sum C_{p,q,r} X^p Y^q Z^r$$

werden, woher aus dem erwähnten Lemma

$$(49) \quad C_{p,q,r} = \left[\frac{f(x,y,z)\nabla}{X^{p+1} Y^{q+1} Z^{r+1}} \right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}$$

ist. Weil der Ausdruck $C_{p,q,r}$ negative Potenzen von Δ enthält, bemerke ich, wenn man anstelle der transformierten Gleichungen $s = X$, $t = Y$, $u = Z$ die volleren Formeln verwendet hätte, welche wir anfangs vorgelegt haben, dass jener Ausdruck $C_{p,q,r}$, welchen Formel (47) an die Hand gibt, aus mehreren sehr komplexen Reihen zusammengesetzt wäre, welche aus der Entwicklung der negativen Potenzen von Δ hervorgehen.

Man findet die ganze Reihe, wenn sie allein aus positiven Potenzen von s, t, u besteht, als

$$(50) \quad f(x,y,z) = \left[\frac{f(x,y,z)\nabla}{(X-s)(Y-t)(Z-u)} \right]_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}},$$

welche Formel den Vorzug besitzt, dass sie sich jeder beliebigen Art und Weise anpasst, auf welche die man die Entwicklung der Funktion $f(x,y,z)$ durchzuführen wünscht.

Aus Formel (18) von Lemma III lässt sich die für $C_{p,q,r}$ gefundene Formel sogar auf diese Weise darstellen:

$$(51)\quad pqrC_{p,q,r} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{X^p Y^q Z^r}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \\ & + \frac{1}{X^p}\frac{\partial Y^{-q} Z^{-r}}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{1}{Y^q}\frac{\partial Z^{-r} X^{-p}}{\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \frac{1}{Z^r}\frac{\partial X^{-p} Y^{-q}}{\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{1}{Y^q Z^r}\frac{\partial^2 X^{-p}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{Y^q}\frac{\partial Z^{-r}}{\partial y}\frac{\partial X^{-p}}{\partial z} + \frac{1}{Z^r}\frac{\partial Y^{-q}}{\partial z}\frac{\partial X^{-p}}{\partial y}\right] \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{1}{Z^r X^p}\frac{\partial^2 Y^{-q}}{\partial z \partial x} + \frac{1}{Z^r}\frac{\partial X^{-p}}{\partial z}\frac{\partial Y^{-q}}{\partial x} + \frac{1}{X^p}\frac{\partial Z^{-r}}{\partial x}\frac{\partial Y^{-q}}{\partial z}\right] \\ & + \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{1}{X^p Y^q}\frac{\partial^2 Z^{-r}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{X^p}\frac{\partial Y^{-q}}{\partial x}\frac{\partial Z^{-r}}{\partial y} + \frac{1}{Y^q}\frac{\partial X^{-p}}{\partial y}\frac{\partial Z^{-r}}{\partial x}\right] \end{aligned} \right\}_{x^{-1}y^{-1}z^{-1}}.$$

Mithilfe dieser Formel wird das vor einiger Zeit vom illustren Herrn Laplace über die Auflösung von drei Gleichungen in drei Variablen dargebotene Theorem leicht bewiesen. Denn nach Vorgabe der Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= s + \alpha f(\xi, v, \zeta), \\ v &= t + \beta \varphi(\xi, v, \zeta), \\ \zeta &= u + \gamma \psi(\xi, v, \zeta), \end{aligned}$$

welche Form jener verwendet, setze man

$$\xi = s + x, \quad v = t + y, \quad \zeta = u + z,$$

woher die gegebenen Gleichungen in diese übergehen:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{f(s+x, t+y, u+z)}, \\ \beta &= \frac{y}{\varphi(s+x, t+y, u+z)}, \\ \gamma &= \frac{z}{\psi(s+x, t+y, u+z)}. \end{aligned}$$

Wenn nun festgelegt wird, dass

$$F(\xi, v, \zeta) = F(s+x, t+y, u+z) = \sum C_{p,q,r} \alpha^p \beta^q \gamma^r$$

ist, geht aus Formel (51) durch Setzen von $X = \frac{x}{f}$, $Y = \frac{y}{\varphi}$, $Z = \frac{z}{\psi}$ und unter Verwendung unserer üblichen Notation für die Ableitungen

$$(52) \quad C_{p,q,r} = \frac{1}{\Pi(p)\Pi(q)\Pi(r)} \frac{\partial^{p+q+r-3} M}{\partial x^{p-1} \partial y^{q-1} \partial z^{r-1}}$$

hervor, wo

$$M = \left\{ \begin{aligned} & f^p \varphi^q \psi^r \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} \\ & + f^p \frac{\partial \varphi^q \psi^r}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \varphi^q \frac{\partial \varphi^r f^p}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \psi^r \frac{\partial f^p \varphi^q}{\partial z} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ & + \frac{\partial F}{\partial x} \left[\varphi^q \psi^r \frac{\partial^2 f^p}{\partial y \partial z} + \varphi^q \frac{\partial \psi^r}{\partial y} \frac{\partial f^p}{\partial z} + \psi^r \frac{\partial \varphi^q}{\partial z} \frac{\partial f^p}{\partial y} \right] \\ & + \frac{\partial F}{\partial y} \left[\psi^r f^p \frac{\partial^2 \varphi^q}{\partial z \partial x} + \psi^r \frac{\partial f^p}{\partial z} \frac{\partial \varphi^q}{\partial x} + f^p \frac{\partial \psi^r}{\partial x} \frac{\partial \varphi^q}{\partial z} \right] \\ & + \frac{\partial F}{\partial z} \left[f^p \varphi^q \frac{\partial^2 \psi^r}{\partial x \partial y} + f^p \frac{\partial \varphi^q}{\partial x} \frac{\partial \psi^r}{\partial y} + \varphi^q \frac{\partial f^p}{\partial y} \frac{\partial \psi^q}{\partial x} \right] \end{aligned} \right\}$$

ist und wir anstelle von $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $F(x,y,z)$ einfach f, φ, ψ, F geschrieben haben und nach den Ableitungen $x = s$, $y = t$, $z = u$ zu setzen ist. Diese Formel hat der illustre Herr Laplace in der oben zitierten Abhandlung auf Seite 120 angegeben. Denn die Gleichungen, welche jener verwendet, gehen von ihrer Ausgangsform

$$\begin{aligned} \xi &= \Pi(s + \alpha f(\xi, v, \zeta)), \\ v &= X(t + \beta\varphi(\xi, v, \zeta)), \\ \zeta &= \Omega(u + \gamma\psi(\xi, v, \zeta)), \end{aligned}$$

durch Setzen von $\xi = \Pi(\xi')$, $v = X(v')$, $\zeta = \Omega(\zeta')$ auf die oben verwendete Form zurück.

Und wenn nach Vorgabe der Gleichungen

$$f(x, y, z, t, u, v) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, t, u, v) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, t, u, v) = 0$$

x, y, z und daher auch die Funktion $F(x, y, z, t, u, v)$ als eine Funktion von t, u, v betrachtet werden, und unter dieser Annahme die partiellen Ableitungen von F nach t, u, v zu finden sind, lässt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial^{p+q+r} F}{\partial t^p \partial u^q \partial v^r}$$

leicht allgemein mit unseren Formeln darbieten.

Was wir aber bisher über zwei bzw. drei Gleichungen in zwei bzw. drei Variablen vorgestellt haben, wird mit derselben Leichtigkeit auf jede beliebige Anzahl an Gleichungen und Variablen verallgemeinert.